高三数学问题设计有效性的几点思考

◉福建省福州屏东中学 蒋剑锋
◉福建省福州第十六中学 林丽群

教师在学生高三阶段的数学复习中首先要做的是对《课程标准》《考试大纲》《考试说明》的仔细研究，并因此将这一复习阶段的教学目标进行准确的定位以保障教学的方向，同时，教师应以《课程标准》的先进理念为指导，将先进的理念融入教学以促成数学高考复习有效性的实现.另外，教师还应该对数学高考考什么、怎么考进行深入研究，只有这样，我们应对数学高考的准备工作才会更加完美.

一、着眼于概念辨析与易错之处设计问题

高考试题不管如何变化都离不开相关基础知识与基本能力考查的范畴，因此，教师在高三数学复习中应重视对重要概念、公式、法则的复习，在复习中将这些重要知识点的形成及其典型例题作为重点帮助学生进行梳理，并因此将这些重要知识点中易错、易混淆的地方设计进复习的各个环节与问题中，使得学生在辨析中形成正确而牢固的认知.

1.着眼于概念辨析之处设计的问题

例1 已知$f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a & (x<1),\\ \log_a x & (x\geqslant 1)\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上为减函数，则$a$的取值范围为（ ）.

A. $(0,1)$ B. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ C. $\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right]$ D. $\left[\frac{1}{7},1\right]$

分析：相当一部分学生得到$0<a<\frac{1}{3}$的结果，没注意到$x=1$时应保证$7a-1\geqslant 0$而出错.此问题的设计目的在于函数单调性本质的复习，这是清晰而有效的.

2.着眼于公式应用之处设计的问题

例2 (1)设$f(n)=2+2^4+2^7+2^{10}+\cdots+2^{3n+10}(n\in\mathbf{N})$，则$f(n)$等于______.

(2)设$f(n)=a+a^4+a^7+a^{10}+\cdots+a^{3n+10}(n\in\mathbf{N},a\in\mathbf{R})$，则$f(n)$等于______.

关于项数和公比是否等于1的讨论是学生经常容易出错的地方.

3.着眼于易错易混淆之处设计的问题

很多看起来非常简单的问题或者叙述常常是很多学生容易混淆或者区分之时会感觉困难的，教师察觉到学生的这种学习状况时应该及时设计出针对性的问题以促成学生进行对比与感悟.比如，曲线在某点处的切线和过某点的切线之间的具体区别在哪里，函数定义域是A和函数在A上有意义又有何具体不同等问题都可以进行针对性问题设计，使得学生在区分与辨析的实战中牢固掌握正确知识.

例3 已知函数$f(x)=8x^2+16x-k$，$g(x)=2x^3+5x^2+4x$（其中k为实数）.

(1)若对于任意$x\in[-3,3]$都有$f(x)\leqslant g(x)$成立，求k的取值范围；

(2)存在$x\in[-3,3]$，使$f(x)\leqslant g(x)$成立，求k的取值范围；

(3)若对于任意x_1、$x_2\in[-3,3]$都有$f(x)\leqslant g(x)$成立，求k的取值范围；

(4)若对于任意$x_1\in[-3,3]$总有$x_2\in[-3,3]$存在并能使$g(x_2)=f(x_1)$成立，求k的取值范围；

(5)若对于任意$x_1\in[-3,3]$总有$x_2\in[-3,3]$存在并能使$f(x_1)\geqslant g(x_2)$成立，求k的取值范围.

分析：令$h(x)=g(x)-f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$.

(1)转化为$x\in[-3,3]$时，$h(x)\geqslant 0$恒成立，故$h(x)_{\min}\geqslant 0$，$k\geqslant 45$；

(2)转化为$x\in[-3,3]$时，$h(x)\geqslant 0$有解，故$h(x)_{\min}\geqslant 0$，$k\geqslant -7$；

(3)转化为$x\in[-3,3]$时，$f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\min}\Leftrightarrow 120-k\leqslant -21\Leftrightarrow k\geqslant 141$；

(4)问题转化为$x\in[-3,3]$时，$f(x)$的值域是$g(x)$值域的子集，易得$9\leqslant k\leqslant 13$；

(5)$[f(x)]_{\min}\geqslant[g(x)]_{\min}$.

这是能够有效促进学生对恒成立和有解问题进行区分与重新认识的问题，设计的意义与价值都得到了很好的体现.

二、着眼于知识体系建构进行问题的设计

高三总复习阶段将知识进行重新整合并使之形成

完整的结构体系能使学生对知识之间的联系产生更好的认识.富有启发性的问题串在教师的精心设计下能够使学生对知识体系重新建构并加强知识之间的纵向联系."一题多变"、"一题多用"、"多题归一"等变化在这一阶段是最为常见且实用的变式运用.

问题：已知函数$f(x)=x^3-4x^2+4x$.

(1) 求$f(x)$的单调区间；

(2) 求$f(x)$的极值.

变式1：已知函数$f(x)=x^3-4x^2+4x$，$x\in\left[0,\frac{5}{2}\right]$的最大、最小值.

设计意图：①求$f(x)$单调区间；②求$f(x)$的极值；③求$f(x)$的最值.

变式2：已知函数$f(x)=x^3-4x^2+ax$在区间$(1,2)$上为减函数，且在区间$(2,+\infty)$上为增函数，求实数a的值.

设计意图：明确$x=2$是函数的极小值点，$a=4$.

变式3：已知函数$f(x)=x^3-4x^2+ax$在区间$(1,2)$上为减函数，则实数a的范围如何？

设计意图：此变式的设计重在考查从已知函数的单调性如何对参数的取值范围进行求解.$f'(x)=3x^2-8x+a<0$对$x\in(1,2)$恒成立，二次函数的知识也在这一变式中得到了回顾.

变式4：已知函数$f(x)=x^3-4x^2+4x$，试证对任意的x_1，$x_2\in\left[0,\frac{5}{2}\right]$，不等式$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{3}{2}$恒成立.

设计意图：此变式的设计重在对化归和转化思想的考查，若函数$f(x)$在$x\in\left[0,\frac{5}{2}\right]$上的最大值是$m$，最小值是$n$，只需证明$|m-n|<\frac{3}{2}$即可.

变式5：已知函数$f(x)=x^3-4x^2$，$g(x)=a-4x$，那么，实数a为何值时，上述两个函数的图像有且仅有三个公共点？

设计意图：此题的变式重在函数和方程、数形结合、等价转化等思想的考查.问题可转化为$f(x)=g(x)$有三个根，即$h(x)=x^3-4x^2+4x=a$有三个根，由图（此略）可知，$a\in\left(0,\frac{32}{27}\right)$.

变式6：已知函数$f(x)=x^3-4x^2+4x$，$g(x)=8x^2-16x-k$（其中k为实数），若对于任意$x_1\in[0,3]$总有$x_2\in[0,3]$存在并能使$g(x_1)=f(x_2)$成立，求k的取值范围.

设计意图：此题的变式重在对等价转化思想、集合之间的包含关系以及函数值域等问题的考查，同例3的第(4)小问，$-8\leqslant k\leqslant 11$.

上述案例中将一个基本问题进行了诸多变化并使得知识得到了系统的复习，复习效果自然是系统而有效的.

三、着眼于知识间的横向联系进行问题的设计

高三数学总复习最重要的是将已学知识之间的相互联系搞清楚并将之综合形成整体，然后使学生学会综合运用的方法并因此提升学生对问题的分析与解决能力.因此，教师在复习教学过程中应在关键之处进行及时而精心的问题设计，使得知识之间的横向联系更为紧密并呈现在学生面前.比如，高三数学总复习中用向量的工具来研究直线这一问题，过两点的斜率公式、两直线垂直的充要条件、证明点到直线的距离等问题都可以借助向量的工具来进行研究，直线的方向向量与法向量在平面向量与空间向量的学习之后是可以明确的，即直线$Ax+By+C=0$（A、B不同时为0）的一个方向向量为$(B,-A)$，法向量为(A,B)，两直线之间的位置关系运用它们来进行判断当然是有效的.

帮助学生回顾旧知、加强知识之间的横向联系、进一步把握过程性知识、培养学生解决问题的综合能力等教学目的在这些问题的提出与解决中都得到了很好的实现.

四、着眼于学生的自主探究进行问题的设计

能够有效考查学生探究能力的试题在近年来的高考命题中备受青睐，因此，教师在高三总复习过程中应着眼于学生探究能力的培养进行问题情境的设计，使得学生在主动探究过程中逐步建构知识体系并因此形成自己独到而牢固的理解.

例4　已知$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，O为坐标原点且A、O、B不共线，请用点A、B的坐标来表示$\triangle AOB$的面积.

这是一个符合学生思维"最近发展区"并能引发认知冲突形成的有效问题，学生思维得以激活的同时也使向量的相关知识与应用得到了极为有效的复习.

由此可见，好的问题与教学设计往往能使数学复习获得事半功倍的效果，高三数学教师必须在问题的设计上仔细斟酌和钻研并因此提升问题设计与教学活动的有效性. H